3）ブラッドレイの一対比較法

どちらが良いか（あるいは、好きか）という 1 か 0 の評価データから、判定比を逐次近似により推定する方法。ブラッドレイは、試料 j よりも試料 i の方が良い（好きだ）と答える確率を π_{ij} としたときに、π_{ij} は、試料 i と j の判定比 π_i 及び π_j から、以下の式で求められると考えた[22)]。
即ち、

$$\pi_{ij} = \frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j} \tag{2.3.14}$$

ブラッドレイの一対比較法は、この確率を基にして、各試料の判定比 π_i を推定しようとするものである。
なお、π_i の推定値は、次の連立方程式を解くことによって求められる。

$$\frac{f_i}{\pi_i} = n\sum_{j\neq i}\frac{1}{\pi_i + \pi_j} \tag{2.3.15}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\pi_i = 1 \tag{2.3.16}$$

なお、k は試料の数、n は反復数である。
また、f_i は、資料 i が、i を除くすべての試料との組み合わせで、i の方が良い（好きだ）と答えた数の総和である。

表 2.3.4　判定結果一覧表
（i と j の組み合わせで、より好きだと回答した方に○がついている）

組み合わせ	A1	A2	A1	A3	A1	A4	A2	A3	A2	A4	A3	A4
1	○	×	×	○	×	○	×	○	×	○	○	×
2	○	×	×	○	×	○	○	×	×	○	×	○
3	×	○	×	○	×	○	○	×	○	×	×	○
4	×	○	○	×	×	○	×	○	×	○	×	○
5	×	○	○	×	×	○	×	○	×	○	○	×
○の数	2	3	2	3	0	5	2	3	1	4	2	3

手順 1

試料数を k、比較回数を n とする。表 2.3.4 の例では、k=4、n=5 である。

まず、A_i を他の (k-1) 個の試料と n 回比較した n(k-1) の判定の中で A_i が良いと判断された回数 f_i を求める。

その手順としては、まず各組み合わせで○の数を求め、その結果を表にまとめる（表 2.3.5）。下の表の 1 行目の A_1 と 2 列目の A_2 の位置には、A_1 と A_2 で、A_1 の方が良い（あるいは、好き）と判断された回数（この場合は、2）が書かれている。同様に、２行目の A2 と 1 列目の A1 の位置には、A_1 と A_2 で、A_2 の方が良い（あるいは、好き）と判断された回数（この場合は、3）が書かれている。以下、同様である。

そして、この表の各行の和が、f_i になる。

表 2.3.5　表 2.3.4 をまとめ直したもの

	A_1	A_2	A_3	A_4	f_i
A_1		2	2	0	4
A_2	3		2	1	6
A_3	3	3		2	8
A_4	5	4	3		12

手順２

判定比を以下の逐次近似により推定する。

①第０次近似の求め方

処理間に差がないと仮定して、$\pi_1^{(0)} = \pi_2^{(0)} = \cdots = \pi_k^{(0)} = \dfrac{1}{k}$ (2.3.17)

（今回の例では、$\pi_1^{(0)} = \pi_2^{(0)} = \pi_3^{(0)} = \pi_4^{(0)} = \dfrac{1}{4}$）

と置く。

②第 1 次近似 $\pi^{(1)}$ の求め方

$$\frac{f_i}{\pi_i} = n\sum_{j\neq i}\frac{1}{\pi_i + \pi_j} \tag{2.3.18}$$

より、

$$\pi_i = \frac{f_i}{n}\Big/\sum_{j\neq i}\frac{1}{\pi_i + \pi_j} \tag{2.3.19}$$

よって、

$$\pi_i^{(1)} = \frac{f_i}{n}\Big/\frac{k(k-1)}{2} \tag{2.3.20}$$

今回の例では、

$$\pi_1^{(1)} = \frac{f_1}{n}\Big/\frac{k(k-1)}{2} = \frac{4}{5}\Big/\frac{4(4-1)}{2} = \frac{0.8}{6} = 0.13 \tag{2.3.21}$$

$$\pi_2^{(1)} = \frac{f_2}{n}\Big/\frac{k(k-1)}{2} = \frac{6}{5}\Big/\frac{4(4-1)}{2} = \frac{1.2}{6} = 0.20$$

$$\pi_3^{(1)} = \frac{f_3}{n}\Big/\frac{k(k-1)}{2} = \frac{8}{5}\Big/\frac{4(4-1)}{2} = \frac{1.6}{6} = 0.27$$

$$\pi_4^{(1)} = \frac{f_4}{n}\Big/\frac{k(k-1)}{2} = \frac{12}{5}\Big/\frac{4(4-1)}{2} = \frac{2.4}{6} = 0.40$$

となる。

また、

$$\sum_{i=1}^{k}\pi_i = 1 \tag{2.3.22}$$

より、求めた$\pi_i^{(1)}$をの全体の和が1になるように調整する。
つまり、

$$\pi_1^{(1)}=\frac{\pi_1^{(1)}}{\pi_1^{(1)}+\pi_2^{(1)}+\pi_3^{(1)}+\pi_4^{(1)}}=\frac{0.13}{0.13+0.20+0.27+0.40}=0.13 \tag{2.3.23}$$

$$\pi_2^{(1)}=\frac{\pi_2^{(1)}}{\pi_1^{(1)}+\pi_2^{(1)}+\pi_3^{(1)}+\pi_4^{(1)}}=\frac{0.20}{0.13+0.20+0.27+0.40}=0.20$$

$$\pi_3^{(1)}=\frac{\pi_3^{(1)}}{\pi_1^{(1)}+\pi_2^{(1)}+\pi_3^{(1)}+\pi_4^{(1)}}=\frac{0.27}{0.13+0.20+0.27+0.40}=0.27$$

$$\pi_4^{(1)}=\frac{\pi_4^{(1)}}{\pi_1^{(1)}+\pi_2^{(1)}+\pi_3^{(1)}+\pi_4^{(1)}}=\frac{0.40}{0.13+0.20+0.27+0.40}=0.40$$

③第2次近似

$$\pi_i^{(2)}=\frac{f_i}{n}\Big/\sum_{j\neq i}\frac{1}{\pi_i^{(1)}+\pi_j^{(1)}} \tag{2.3.24}$$

より、

$$\begin{aligned}\pi_1^{(2)}&=\frac{f_1}{n}\Big/\sum_{j\neq i}\frac{1}{\pi_1^{(1)}+\pi_j^{(1)}}\\&=\frac{4}{5}\Big/\left(\frac{1}{\pi_1^{(1)}+\pi_2^{(1)}}+\frac{1}{\pi_1^{(1)}+\pi_3^{(1)}}+\frac{1}{\pi_1^{(1)}+\pi_4^{(1)}}\right)\\&=\frac{4}{5}\Big/\left(\frac{1}{0.13+0.20}+\frac{1}{0.13+0.27}+\frac{1}{0.13+0.40}\right)\\&=\frac{4}{5}\Big/(3.03+2.50+1.89)\\&=0.80/7.42\\&=0.11\end{aligned} \tag{2.3.25}$$

$$\begin{aligned}\pi_2^{(2)}&=\frac{f_2}{n}\Big/\sum_{j\neq i}\frac{1}{\pi_2^{(1)}+\pi_j^{(1)}}\\&=\frac{5}{6}\Big/\left(\frac{1}{\pi_2^{(1)}+\pi_1^{(1)}}+\frac{1}{\pi_2^{(1)}+\pi_3^{(1)}}+\frac{1}{\pi_2^{(1)}+\pi_4^{(1)}}\right)\\&=\frac{5}{6}\Big/\left(\frac{1}{0.20+0.13}+\frac{1}{0.20+0.27}+\frac{1}{0.20+0.40}\right)\\&=\frac{5}{6}\Big/(3.03+2.13+1.67)\\&=1.20/6.83\\&=0.18\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\pi_3^{(2)} &= \frac{f_3}{n} \Bigg/ \sum_{j \neq i} \frac{1}{\pi_3^{(1)} + \pi_j^{(1)}} \\
&= \frac{8}{5} \Bigg/ \left(\frac{1}{\pi_3^{(1)} + \pi_1^{(1)}} + \frac{1}{\pi_3^{(1)} + \pi_2^{(1)}} + \frac{1}{\pi_3^{(1)} + \pi_4^{(1)}} \right) \\
&= \frac{8}{5} \Bigg/ \left(\frac{1}{0.27 + 0.13} + \frac{1}{0.27 + 0.20} + \frac{1}{0.27 + 0.40} \right) \\
&= \frac{8}{5} \Big/ (2.50 + 2.13 + 1.49) \\
&= 1.60/6.12 \\
&= 0.26
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\pi_4^{(2)} &= \frac{f_4}{n} \Bigg/ \sum_{j \neq i} \frac{1}{\pi_4^{(1)} + \pi_j^{(1)}} \\
&= \frac{12}{5} \Bigg/ \left(\frac{1}{\pi_4^{(1)} + \pi_1^{(1)}} + \frac{1}{\pi_4^{(1)} + \pi_2^{(1)}} + \frac{1}{\pi_4^{(1)} + \pi_3^{(1)}} \right) \\
&= \frac{12}{5} \Bigg/ \left(\frac{1}{0.40 + 0.13} + \frac{1}{0.40 + 0.20} + \frac{1}{0.40 + 0.27} \right) \\
&= \frac{12}{5} \Big/ (1.89 + 1.67 + 1.49) \\
&= 2.40/5.05 \\
&= 0.48
\end{aligned}
$$

となる。

また、

$$
\sum_{i=1}^{k} \pi_i = 1 \tag{2.3.26}
$$

より、求めた$\pi_i^{(1)}$を全体の和が 1 になるように調整する。
つまり、

$$
\pi_1^{(2)} = \frac{\pi_1^{(2)}}{\pi_1^{(2)} + \pi_2^{(2)} + \pi_3^{(2)} + \pi_4^{(2)}} = \frac{0.11}{0.11 + 0.18 + 0.26 + 0.48} = 0.11 \tag{2.3.27}
$$

$$
\pi_2^{(2)} = \frac{\pi_2^{(2)}}{\pi_1^{(2)} + \pi_2^{(2)} + \pi_3^{(2)} + \pi_4^{(2)}} = \frac{0.18}{0.11 + 0.18 + 0.26 + 0.48} = 0.17
$$

$$
\pi_3^{(2)} = \frac{\pi_3^{(2)}}{\pi_1^{(2)} + \pi_2^{(2)} + \pi_3^{(2)} + \pi_4^{(2)}} = \frac{0.26}{0.11 + 0.18 + 0.26 + 0.48} = 0.25
$$

$$
\pi_4^{(2)} = \frac{\pi_4^{(2)}}{\pi_1^{(2)} + \pi_2^{(2)} + \pi_3^{(2)} + \pi_4^{(2)}} = \frac{0.48}{0.11 + 0.18 + 0.26 + 0.48} = 0.47
$$

③以下、同じ操作を繰り返して、各判定比が収束するまで n+1 次の判定比を求める。

④このようにして判定比が求められたら、試料間に差があるかどうかを検定する。
以下の式により、自由度 k － 1 のχ^2検定を行う。得られたχ^2値が、χ^2分布の 5 %点以下であれば、試

料間に有意差があるといえる。

$$\chi_0^2 = nk(k-1)\log_e 2 - 2\times\left\{n\sum_{i=1}^{k}\sum_{j>i}\log_e(\pi_i+\pi_j) - \sum_{i=1}^{k} f_i \log_e \pi_i\right\} \tag{2.3.28}$$

以上の手順で、第４次近似までの判定比を、表 2.3.6 に示す（太い文字が各回の判定比である）

表 2.3.6　得られた判定比

ここでは、４次近似で得られた判定比を最終的な判定比の推定量とする。

	fi	fi/n	π (1)	π '(2)	π (2)	π '(3)	π (3)	π '(4)	π (4)
A1	4	0.8	**0.133333**	0.108475	**0.106223**	0.098741	**0.09718**	0.093732	**0.092685**
A2	6	1.2	**0.2**	0.176224	**0.172566**	0.160191	**0.157658**	0.151183	**0.149495**
A3	8	1.6	**0.266667**	0.260465	**0.255059**	0.24642	**0.242524**	0.235828	**0.233195**
A4	12	2.4	**0.4**	0.476033	**0.466152**	0.510715	**0.502639**	0.530547	**0.524624**
1/(P1+P2)			3	1.021197	3.586942	1.016067	3.924067	1.01129	
1/(P1+P3)			2.5		2.767923		2.943743		
1/(P1+P4)			1.875		1.747106		1.66717		
1/(P2+P3)			2.142857		2.338499		2.498869		
1/(P2+P4)			1.666667		1.565636		1.514471		
1/(P3+P4)			1.5		1.386557		1.341989		

つまり、

$$\begin{aligned}\pi_1 &= 0.09\\ \pi_2 &= 0.15\\ \pi_3 &= 0.23\\ \pi_4 &= 0.52\end{aligned} \tag{2.3.29}$$

$$\begin{aligned}\chi_0^2 = 5\times4\times3\times\log_e 2 - 2 &\\ &\times\{5\times(\log_e(0.09+0.15)\\ &+\log_e(0.09+0.23)+\log_e(0.09+0.52)\\ &+\log_e(0.15+0.23)+\log_e(0.15+0.52)+\log_e(0.23+0.52))\\ &-(4\times\log_e 0.09+6\times\log_e 0.15+8\times\log_e 0.23+12\times\log_e 0.52)\}\\ &=60\times0.69-2\times\left(-22.41-(-39.61)\right)=7.51\end{aligned} \tag{2.3.30}$$

$$\chi_0^2 = 7.51 < \chi^2(3,0.05) = 7.81 \tag{2.3.31}$$

＜結論＞

得られたχ²値（7.51）は、自由度３のχ²の５％点の値（7.81）よりも小さな値だったことから、試料間に有意差があるといえない。